

Aufgabe 1: Anharmonisches Fadenpendel (Duffing-Potential)

Betrachten Sie ein Fadenpendel

$$U(x) = mgl \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right) \approx \frac{mg}{2l} x^2 + \frac{mg}{8l^3} x^4 = \frac{f}{2} x^2 + \alpha x^4$$

mit $f = \frac{mg}{l}$ sowie $\alpha = \frac{mg}{8l^3}$ im leicht anharmonischen Fall $\alpha E \ll f^2$ und berechnen Sie die Schwingungsperiode T :

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]/m}}.$$

Hinweise:

- Verwenden Sie die Substitution $\sin^2 \phi = U(x)/E$ und lösen Sie die resultierende quadratische Gleichung für x^2 . Entwickeln Sie x sowie dx bis zur ersten Ordnung in α .
- Die Umkehrpunkte x_i sind durch $E = U(x_i)$ oder $\sin^2 \phi = 1$ gegeben.

Aufgabe 2: Levi-Civita-Tensor

In der Vorlesung wurde der Levi-Civita- oder ϵ -Tensor eingeführt. Dieser ist wie folgt definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1 & , \text{ falls } i, j, k \text{ antizyklisch} \\ 0 & , \text{ falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases}$$

a) Allgemeine Relationen: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{12i} \epsilon_{i23}, \quad \sum_{i=1}^3 \epsilon_{12i} \epsilon_{i12}, \quad \sum_{i=1}^3 \epsilon_{12i} \epsilon_{i21}$$

und verallgemeinern Sie diese, um folgende zentrale Identität zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{lj}$$

b) Anwendungen: Benutzen Sie die Darstellung des Vektorproduktes

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k$$

und die in a) gezeigte Identität, um folgende Relationen zu beweisen:

$$1.) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad 2.) (\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$$

Aufgabe 3: Lenzscher Vektor

Ein Teilchen bewege sich im Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

Zeigen Sie, dass $\alpha m \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p} \times \vec{L}$ eine Erhaltungsgröße ist, d.h. dass

$$\frac{d}{dt} \vec{C} := \frac{d}{dt} \left(\alpha m \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p} \times \vec{L} \right) = 0$$

gilt. Dabei sind $\vec{r}$ der Ortsvektor, $\vec{p}$ der Impuls und $\vec{L}$ der Drehimpuls des Teilchens. Dieser Vektor $\vec{C}$ wird Lenzscher Vektor genannt, liegt in der Bewegungsebene, und zeigt stets zum Perihel, dem zentrumnächsten Punkt. Sein Betrag ist über $C = \alpha m e$ mit der Exzentrizität e verknüpft.

Hinweise:

- Nutzen Sie aus, dass aufgrund von Drehimpulserhaltung $\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{L}$ gilt und benutzen Sie die Bewegungsgleichung $\dot{\vec{p}} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$.
- Setzen Sie $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ein und verwenden Sie die Ergebnisse der vorherigen Aufgabe.

Aufgabe 4: Planetenbewegung im Impulsraum

Gehen Sie von der Definition des Lenzschen Vektors

$$\vec{p} \times \vec{L} + \vec{C} = \alpha m \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

aus, quadrieren Sie diese, nutzen Sie aus, dass sowohl $\vec{p}$ wie $\vec{C}$ senkrecht zum Drehimpuls $\vec{L}$ stehen und zeigen Sie, dass sich für den Impuls eine Kreisgleichung der Art

$$(\vec{p} - \vec{u})^2 = v^2, \quad \text{mit} \quad \vec{u} = \frac{\vec{C} \times \vec{L}}{L^2}, \quad v = \frac{\alpha m}{L}$$

ergibt. Was folgt für $e = 0$?

Hinweise:

- Aus $\vec{p} \perp \vec{L}$ und $\vec{C} \perp \vec{L}$ folgt jeweils $(\vec{p} \times \vec{L})^2 = p^2 M^2$, $(\vec{C} \times \vec{L})^2 = C^2 M^2$
- Nutzen Sie außer den oben genannten Relationen die Symmetrie des Spatproduktes, um auf der linken Seite ein volles Quadrat zu erhalten, nachdem Sie Gleichung (1) quadriert haben.